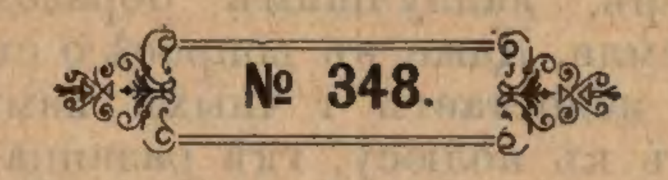
XXIX Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

30 Іюня  № 348. 1903 г.

Градусныя измѣренія русско-шведской экспедиціи на Шпицбергенѣ.

Читатели, вѣроятно, помнятъ объ организаціи русской и шведской академіями наукъ измѣренія дуги меридіана на Шпицбергенѣ. Еще въ 1898 году были начаты работы, которыя продолжались въ лѣтніе мѣсяцы 1899—1901 гг. и были вполнѣ закончены лишь въ прошломъ году. Недавно появилась въ „Revue générale des Sciences" статья одного изъ участниковъ экспедиціи, астронома А. П. Ганскаго, описывающая ходъ работъ на Шпицбергенѣ и полную опасностей и лишеній жизнь русскихъ ученыхъ въ странѣ, столь далекой отъ условій жизни культурнаго міра. Но раньше, чѣмъ познакомить читателя съ этой статьей, мы должны дать кое-какія предварительныя свѣдѣнія, которыя помогутъ намъ уяснить дальнѣйшее.

Уже давно, съ самыхъ древнихъ временъ, люди интересовались вопросомъ о формѣ земли. Ньютонъ—первый, исходя изъ теоретическихъ соображеній, высказалъ мысль, что земной шаръ долженъ быть сплюснутъ у полюсовъ. Вскорѣ явилась возможность провѣрить его мнѣніе на дѣлѣ: Cassini произвелъ наблюденія, которыя, впрочемъ, не подтвердили взгляда Ньютона; на основаніи этихъ измѣреній оказывалось, что земля какъ

будто не сплюснута у полюсовъ, а даже вытянута. Были произведены даже попытки обосновать теоретически выводы Cassini. Между тѣмъ, многіе ученые, опираясь на авторитетъ великаго Ньютона, старались доказать, что наблюденія Cassini были произведены невѣрно. Возгорѣлся споръ, которому суждено было окончиться только въ срединѣ XVIII вѣка въ пользу мнѣнія Ньютона.

Но и до сего времени наука не обладаетъ сколько-нибудь достаточнымъ матеріаломъ для того, чтобы остановиться на той или другой фигурѣ, наилучшимъ образомъ представляющей истинную форму земли. Даже въ вопросѣ о степени сплюснутости земли у полюсовъ недостаетъ т чныхъ измѣреній, особенно въ широтахъ, близкихъ къ полюсу, гдѣ разница въ величинѣ градусовъ должна проявиться наиболѣе рѣзко. Уже 70 лѣтъ тому назадъ англійскій капитанъ Sabine убѣдился въ возможности произвести измѣренія на островахъ Шпицбергена, которые, какъ извѣстно, расположены въ 1000 килом. отъ сѣвернаго полюса, между 76°31′ и 80°50′ сѣв. широты, и тянутся, слѣдовательно, болѣе, чѣмъ на 4°. Но осуществить этотъ планъ удалось только теперь.

Въ чемъ же заключается сущность градусныхъ измѣреній? Они состоятъ изъ двухъ существенно различныхъ дѣйствій: изъ измѣренія линейной длины какой-либо дуги на поверхности земли и вычисленія угловой величины этой дуги. Вычисленіе угловой величины, при современномъ состояніи астрономіи, не представляетъ затрудненій. Гораздо кропотливѣе и труднѣе работа по вычисленію длины дуги. Раньше опредѣляли эту длину непосредственно. Эпоху въ развитіи градусныхъ измѣреній составляетъ методъ голландс‑аго математика Snellius'а (начало XVII в.). Онъ ввелъ такъ называемую тріангуляцію, состоящую въ проложеніи ряда треугольниковъ, въ которыхъ измѣряютъ всѣ углы и длину только одной какой-нибудь стороны. Такую сторону, называемую базисомъ, сравнительно небольшой длины, всегда можно выбрать на ровной, удобной для измѣренія мѣстности; а измѣреніе угловъ—работа несравненно болѣе простая и дающая точные результаты. Чтобы опредѣлить углы треугольника, ставятъ въ точкахъ его вершинъ сигналы, обыкновенно имѣющіе видъ пирамидъ; чтобы сигналъ былъ видѣнъ изъ другой вершины тр-ка, его помѣщаютъ, по возможности, на возвышенномъ мѣстѣ. Зная одну сторону и углы, уже не трудно, по правиламъ тригонометріи, вычислить всѣ прочія стороны, а затѣмъ и разстояніе между конечными пунктами тріангуляціи.

Послѣ этихъ предварительнытъ замѣчаній переходимъ къ статьѣ г. Ганскаго.

Въ 1897 г. шведы предложили русской академіи наукъ предпринять совмѣстно работу по измѣренію дуги меридіана на Шпицбергенѣ. Выработкой программы и руководствомъ работами экспедицій, посылаемыхъ Россіей и Швеціей, завѣдуютъ особыя

коммиссіи, изъ которыхъ русская находится подъ предсѣдательствомъ Августѣйшаго Президента академіи наукъ, а во главѣ шведской поставленъ кронъ-принцъ Густавъ. Въ 1898 г. посланная шведами подготовительная экспедиція произвела рекогносцировку и поставила тригонометрическіе сигналы въ сѣверной части проэктированной сѣти треугольниковъ, на долю русскихъ выпала обязанность сдѣлать лѣтомъ 1899 г. подобную же рекогносцировку береговъ Stor Fiord'a (Стурфіорда), залива въ юго-восточной части Шпицбергена.

Въ составъ экспедиціи 1899 г. вошли: капитанъ генеральнаго штаба Д. Д. Сергіевскій, докторъ медицины А. А. Бунге, астрономы А. С. Васильевъ, В. В. Ахматовъ, І. І. Сикора, А. П. Ганскій и А. Д. Педашенко; физики: Э. В. Штеллингъ и А. Р. Бейеръ; натуралисты: А. А. Быляницкій-Бируля, студентъ О. О. Баклундъ и механикъ Ганъ. Изъ шведовъ находились въ русской экспедиціи проф. de Geer и лейтенантъ Knorring. Руководство работами было поручено членамъ русской коммиссіи, академикамъ Ѳ. Н. Чернышеву и О. А. Баклунду. Шведская экспедиція состояла изъ Jäderine'a, завѣдывавшаго геодезическими работами, астрономовъ Angstrom'a, Rubin'a, Larsen'a, Frenckel'я и одного топографа.

13-го іюня соединенная эскадра русскихъ и шведскихъ судовъ вышла изъ Тромзе и отправилась къ Шпицбергену, куда русская экспедиція прибыла 16-го іюня. Часть экспедиціи осталась въ Горнзундѣ (Hornsund) въ юго-западной части Шпицбергена, гдѣ предполагалось устроить все, необходимое для зимовки нѣкоторыхъ ученыхъ, пожелавшихъ провести здѣсь зимніе мѣсяцы. По плану, выработанному заранѣе, геодезическія работы должны были начаться съ сѣвера, гдѣ уже въ 1898 г. шведской рекогносцировочной экспедиціей были выставлены сигналы; поэтому остальная часть русской экспедиціи отправилась на сѣверъ. Но оказалось, что тамъ шведы встрѣтили сплошной ледъ, изъ котораго они съ трудомъ выбрались, рискуя быть совершенно затертыми. Поэтому было рѣшено, что русская экспедиція будетъ вести работу по берегамъ Stor-Fiord'a, а шведскія суда останутся выжидать благопріятнаго движенія льдовъ, чтобы идти на сѣверъ, въ заливъ Treirenberg (Трейренбергъ) и заняться тамъ измѣреніемъ базиса около горы Heklahoek (Гекла-Гукъ). Въ результатѣ русскимъ досталась южная часть сѣти треугольниковъ до ТумбъПоэнта (Thumb-Point'a), а шведамъ сѣверная. У русскихъ было 10 сигналовъ, у шведовъ 13, но первые представляли больше трудностей, вслѣдствіе большого разстоянія между сигналами, доходившаго до 130 килом.

Вернувшись въ Горнзундъ, члены экспедиціи занялись установкой геодезической связи между мѣстомъ зимовки и сѣтью треугольниковъ въ Стурфіордѣ, для чего были выбраны двѣ вершины. Къ сожалѣнію, сильная буря, столь обычная въ полярныхъ странахъ, очень затрудняла производство работъ. По окончаніи предварительныхъ работъ въ Горнзундѣ, экспедиція отправилась въ Стурфіордъ начать разстановку сигналовъ.

За лѣто 1899 г. удалось поставить сигналы въ Стурфіордѣ, произвести геодезическія и астрономическія наблюденія въ двухъ наиболѣе трудныхъ пунктахъ южной части сѣти и сдѣлать рекогносцировку базиса у Whales Point'а (Ульсъ-Поэнта). У шведовъ дѣло шло не такъ успѣшно. Послѣ долгой и упорной борьбы съ полярными льдами, они, наконецъ, добрались до мѣста, гдѣ было рѣшено устроить зимовку—до Heklahoek. Шведская экспедиція должна была поставить сигналъ на горѣ Chydenius'а, пунктѣ, соединявшемъ тригонометрическія сѣти двухъ націй. Три раза пытались шведы попасть туда, но всякій разъ безуспѣшно, вслѣдствіе страшной бури. Дурная погода сильно препятствовала и измѣреніямъ.

29-го августа русская экспедиція отправилась въ Европу, оставивъ часть зимовать на Шпипбергенѣ. Въ составъ ея вошли капитанъ Сергіевскій, докторъ Бунге, астрономы Васильевъ, Сикора, Ахматовъ и физикъ Бейеръ.

Послѣ ухода со Шпицбергена судовъ, зимовщики занялись устройствомъ обсерваторій—двухъ астрономическихъ и одной для наблюденія сѣвернаго сіянія. Между тѣмъ, температура все падала и въ концѣ сентября дошла уже до 12° ниже нуля. 5-го октября солнце зашло, чтобы появиться снова только черезъ четыре мѣсяца. Началась полярная ночь.

Наиболѣе интересными работами этого времени являются фотографическіе снимки сѣвернаго сіянія и его спектровъ, сдѣланные астрофизикомъ экспедиціи І. І. Сикорой. Особенныя трудности представляло фотографированіе спектра, вслѣдствіе слабости явленія; поэтому приходилось снимать очень долго. Одинъ изъ лучшихъ негативовъ экспозировался въ продолженіе 22 дней. Метеорологическія наблюденія производились при условіяхъ, подчасъ весьма тяжелыхъ; главную опасность представляли бури и бѣлые медвѣди. Богатый матеріалъ, полученный экспедиціей, требуетъ, конечно, еще тщательной обработки для окончательныхъ выводовъ.

Съ апрѣля могли уже начаться геодезическія работы. Чтобы пройти отъ мѣста зимовки до пунктовъ, гдѣ должны быть установлены сигналы, нужно было пересѣчь Шпицбергенъ со множествомъ горъ и ледниковъ, изобиловавшихъ глубокими разсѣлинами. Нерѣдко жизнь путешественниковъ подвергалась серьезной опасности; случалось, что люди и собаки падали въ разсѣлины; несчастныхъ случаевъ съ людьми, впрочемъ, не было. Наконецъ, геодезисты достигли горы Кейльхау (Keilhau), мѣста очень неудобнаго для поднятія; оно представляло трудности и для наблюденій, такъ какъ сигналъ Whales-Point'а, образовывавшій съ нимъ одну изъ сторонъ тригонометрическаго треугольника, находится на разстояніи 130 килом. Вообще, наблюденія на Кейльхау стоили многихъ трудовъ и времени. Въ продолженіе 90 дней тамъ работали два астронома.

8-го іюня прибыли изъ Европы суда русской экспедиціи,

пополненной еще нѣсколькими новыми членами. Съ первыхъ же шаговъ она натолкнулась на очень большія затрудненія. Около Шпицбергена оказалось такъ много льду, какъ не запомнитъ за послѣдніе 50 лѣтъ никто изъ знающихъ Шпицбергенъ. Весь архипелагъ, кромѣ западной части, былъ окруженъ льдами. Ледоколъ съ большимъ трудомъ достигъ Whales-Head'a (Уэльсъ-Хеда), гдѣ должна была начаться работа съ сигналомъ. Гораздо труднѣе было добраться до другихъ сигналовъ. Нерѣдко моремъ пройти оказывалось невозможнымъ и приходилось пробираться окольнымъ путемъ сушей. Надо замѣтить, что всѣ сигналы русской сѣти были расположены въ восточной части, а море было свободно отъ льдовъ только на западѣ.

Чтобы достигнуть, напр., горы Хеджехога (Hedgehog), астроному Васильеву, одному изъ наиболѣе энергичныхъ и смѣлыхъ членовъ экспедиціи, пришлось сдѣлать длинный и опасный путь по горамъ. Вершина Хеджехога представляетъ площадку шириной въ 3 метра; на ней нужно было помѣстить сигналъ, палатку и инструменты. На такой высотѣ вѣтеръ былъ очень силенъ, и находящіеся въ палаткѣ рисковали быть сорванными въ море съ высоты болѣе 500 метровъ.

Наиболѣе трудной, но и наиболѣе важной частью работы было отысканіе мѣста внутри острова, гдѣ можно было бы помѣстить сигналъ, видимый и со шведской и съ русской стороны и соединявшій, такимъ образомъ, обѣ сѣти тр-ковъ. На это пришлось затратить 45 дней. Погода сильно мѣшала этимъ поискамъ. Часто люди падали въ трещины ледниковъ и нужно удивляться, что всѣ, въ концѣ концовъ, остались невредимыми. Наконецъ, удалось найти мѣсто, удовлетворявшее требованіямъ. Это была гора Чернышева.

Время шло очень быстро и приближался моментъ, когда работы должны были закончиться и члены экспедиціи собраться въ одно мѣсто—Горнзундъ, откуда суда должны были выйти въ Европу.

Шведы и на этотъ разъ оказались менѣе счастливыми. Имъ удалось пристать къ сѣверному берегу Шпицбергена, къ тому мѣсту, гдѣ зимовала шведская экспедиція, только къ концу лѣта. Вслѣдствіе отсутствія судна, оставшіеся на зиму товарищи могли только произвести измѣреніе базиса, да еще двухъ сигналовъ, расположенныхъ вблизи мѣста зимовки. Когда шведская экспедиція, наконецъ, пришла, у нея осталось времени только на то, чтобы уложить инструменты и остальныя вещи и двинуться на югъ, пока льды не преградили еще пути.

Въ 1901 г. русскіе и шведы снова отправились на Шпицбергенъ. Руководство русской экспедиціей было поручено академику Чернышеву, а шведской—профессору de Geer'у. *Ермакъ*, самый большой русскій ледоколъ, долженъ былъ довести русскихъ до Шпицбергена на случай, если бы льды оказались такими же, какъ въ прошломъ году. Первымъ дѣломъ, послѣ прибытія, была

очистка сигналовъ отъ снѣга и льда. Затѣмъ экспедиція отправилась въ Whales Point, мѣсто, избранное для измѣренія базиса.

При обыкновенныхъ условіяхъ, измѣреніе базиса — дѣло очень трудное и кропотливое; но, благодаря примѣненію новыхъ приборовъ—аппарата Jäderine'а и нитей изъ металла Guillaume'а (сплавъ желѣза съ никкелемъ, обладающій весьма малымъ коэффиціентомъ расширенія), работа пошла гораздо быстрѣе.

Въ простѣйшемъ своемъ видѣ аппаратъ Jäderine'а состоитъ изъ нитей въ 24—25 метровъ длины и 1,7 мм. толщины Нити оканчиваются двумя маленькими линейками, раздѣленными на миллим. Два динамометра служатъ для натягиванія нити до опредѣленной и неизмѣнной величины.

Окончивъ измѣреніе базиса, астрономы вернулись къ прежней работѣ, наблюденію сигналовъ. Съ особеннымъ трудомъ удалось достигнуть Hellwald'а, плато въ 700 м. высотой, на вершинѣ котораго нужно было поставить сигналъ, представлявшій сѣверный конецъ русской тригонометрической сѣти. Ледоколъ два раза пробовалъ подойти къ берегу, около ледника Negri, но безуспѣшно; только послѣ третьей попытки удалось высадиться на берегъ возлѣ ледника. Предстояло еще трудное и опасное путешествіе до Hellwald'а. Большую помощь въ пути оказали поморы, ежегодно пріѣзжающіе на Шпицбергенъ на промыслы. Наконецъ, удалось добраться до Hellwald'а; но плато оказалось недоступнымъ съ этой стороны: передъ путешественниками возвышалась стѣна въ 50—60 м. Послѣ долгихъ поисковъ нашелся проходъ, но такой опасный, что даже смѣлые и опытные поморы категорически отказались идти. Едва удалось одному изъ астрономовъ уговорить поморовъ. Но, какъ бы то ни было, сигналъ на Hellwald'ѣ былъ поставленъ.

Къ концу іюля работа настолько подвинулась впередъ, что, при благопріятныхъ условіяхъ, она могла бы быть закончена черезъ мѣсяцъ. Къ сожалѣнію, погода стояла въ это время очень плохая. Вообще, на Шпицбергенѣ наблюдаются явленія, сильно тормозящія геодезическія работы. Часто, когда надъ поверхностью моря все ясно и тихо, вершины горъ оказываются покрытыми облаками. (Нѣчто подобное замѣчается и на Альпахъ.) То, что снизу кажется облакомъ, на самомъ дѣлѣ представляетъ снѣжную вьюгу съ такимъ вѣтромъ, что положительно невозможно держаться на ногахъ. Ко всему этому прибавляется еще гололедица, въ результатѣ которой толстые слои льда покрываютъ и палатку и сигналъ. Горизонтъ все время оставался подернутымъ дымкой; необходимо было, не переставая, выжидать момента проясненія, чтобы воспользоваться имъ для производства наблюденій.

Все же работа подвигалась впередъ, и къ концу августа оставалось только произвести наблюденія на мысѣ Ли (cap Lee). Впрочемъ, былъ еще пунктъ — Thumb Point, находившійся на границѣ русской и шведской сѣти, относительно котораго было неизвѣстно, произвели-ли тамъ наблюденія шведы или нѣтъ.

Экспедиція раздѣлилась на двѣ части: одна часть занялась сигналомъ мыса Ли, а другая отправилась въ Thumb Point. Но, пройдя часть дороги, путешественники натолкнулись на такой толстый ледъ, что пришлось вернуться назадъ. Вторая попытка пройти къ Thumb Point'у была сдѣлана уже на ледоколѣ, который пробился черезъ ледъ. Но оказалось, что труды русскихъ астрономовъ были излишни. Недалеко отъ Thumb Point'а, въ заранѣе условленномъ мѣстѣ, было найдено письмо проф de Geer'а, къ которомъ онъ извѣщалъ русскихъ, что шведы уже установили сигналъ и начали наблюденія. Русскимъ оставалось только вернуться назадъ.

Въ это же время А. П. Ганскій производилъ наблюденія надъ опредѣленіемъ ускоренія силы тяжести на плато Hellwald'а, которое онъ описываетъ, какъ одинъ изъ прелестныхъ, живописныхъ уголковъ Шпицбергена *).

Къ концу августа погода сдѣлалась превосходной. Въ продолженіе 8 дней солнце не переставало свѣтить. Хотя всѣ долины, море и даже вершины, не превышавшія 500 м., были все время покрыты туманомъ, но болѣе возвышенныя мѣста, на которыхъ были расположены сигналы, поднимались надъ этимъ моремъ тумана—и наблюденія производились. При такихъ условіяхъ работа быстро близилась къ концу и вскорѣ, послѣ нѣкоторыхъ дополнительныхъ наблюденій, экспедиція стала готовиться къ отъѣзду.

„Вся наша жизнь на Шпицбергенѣ", писалъ г. Ганскій: „протекала въ такой исключительной обстановкѣ и такъ мало напоминала формы цивилизованной жизни, была такъ интересна и въ такой степени способствовала сближенію между членами экспедиціи, что, когда пришлось разставаться съ берегами этого архипелага, мы всѣ чувствовали какое-то сожалѣніе"....

Шведы не могли окончить своихъ наблюденій въ 1901 году. На сѣверѣ Шпицбергена они встрѣтили слой льда толщиной въ 5 м., черезъ который они не могли пробраться; поэтому пришлось отложить работы до слѣдующаго года. Въ 1902 году они послали двухъ астрономовъ Rubin'а и Zeipel'я, которые и закончили всѣ измѣренія.

Такимъ образомъ, результатомъ работъ русско-шведской экспедиціи является дуга меридіана въ 4°10′. Въ данный моментъ происходятъ вычисленія, которыя должны занять очень много времени. Результаты ихъ станутъ извѣстны не раньше, какъ черезъ годъ, черезъ два.

Работы на Шпицбергенѣ кончены, но интересъ къ изслѣдованіямъ на этомъ архипелагѣ только зарождается. Уже русская

---

*) А. П. Ганскій уже раньше былъ извѣстенъ своими трудами надъ опредѣленіемъ ускоренія силы тяжести; имъ, между прочимъ, была измѣрена величина *g* для Монблана.

экспедиція могла убѣдиться, какой удобное мѣсто представляетъ Шпицбергенъ для изученія сѣвернаго сіянія и земного магнитизма. Зимовщики 1899—1900 года могли наблюдать сѣверное сіяніе почти ежедневно. А между тѣмъ, это время совпало какъ разъ съ minimum'омъ солнечныхъ пятенъ на солнцѣ. имѣющихъ, какъ извѣстно, очень тѣсную связь съ сѣверными сіяніями. Maximum солнечныхъ пятенъ приближается (1904—1905 гг.), и есть всѣ основанія думать, что тогда это величественное явленіе природы будетъ происходить еще чаще, а само оно будетъ еще ярче, интенсивнѣе.

Наблюденія надъ земнымъ магнитизмомъ должны дать очень цѣнные результаты, хотя бы для изученія его связи съ дѣятельностью солнца; достаточно вспомнить, что напряженіе земного магнитизма на Шпицбергенѣ въ 10 разъ больше, чѣмъ въ Петербургѣ.

Н. О.

Машина Meslin'а для рѣшенія уравненій.

В. Гернета въ Одессѣ.

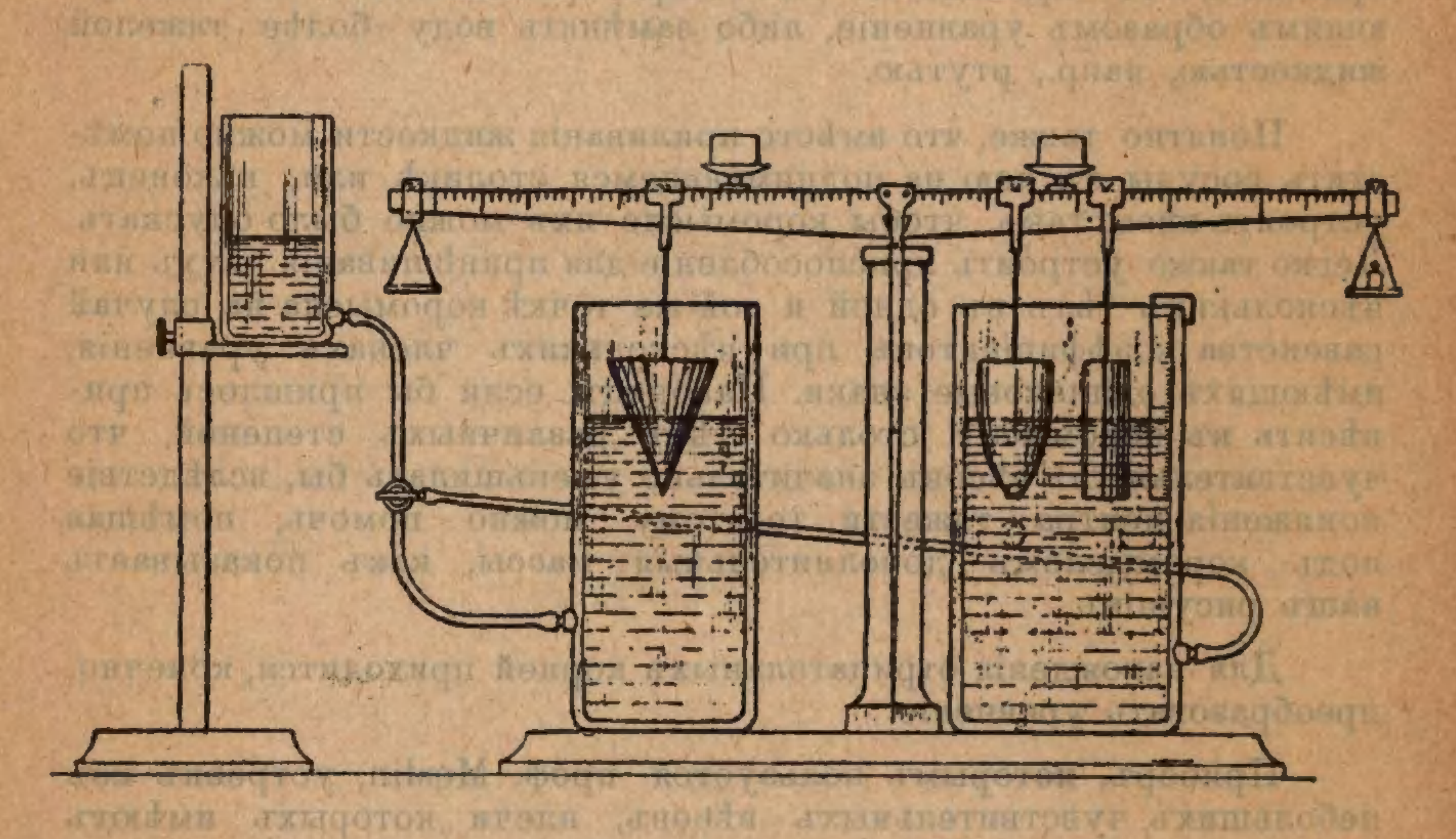
Въ № 3 „Revue générale de chimie pure et appliquée" за текущій годъ помѣщена статья F. Marre'a, съ описаніемъ очень остроумной машины проф. Meslin'а въ Montpellier, служащей для рѣшенія численныхъ уравненій вида

$$p_1x^n + p_2x^{n-1} + \ldots + p_nx = A.$$

Идея машины Meslin'а крайне проста, и мы полагаемъ, что описаніе этого прибора заинтересуетъ читателей „Вѣстника" тѣмъ болѣе, что и выполненіе идеи не отличается сложностью.

Къ плечамъ коромысла точныхъ вѣсовъ привѣшиваются при помощи твердыхъ стержней тѣла вращенія. Оси этихъ тѣлъ вертикальны, а форма ихъ такова, что объемъ части тѣла, отсѣкаемой горизонтальной плоскостью, измѣняется пропорціонально 1-й, 2-й, ..., n-й степени разстоянія этой плоскости отъ нижняго конца тѣла. Иначе говоря, тѣла эти происходятъ отъ вращенія параболъ различныхъ порядковъ вокругъ вертикальной оси. Нижніе концы всѣхъ этихъ тѣлъ находятся въ одной горизонтальной плоскости при горизонтальномъ положеніи коромысла. Для краткости мы просто будемъ называть ихъ тѣлами 1-й, 2-й, ... n-й степени. Тѣла эти привѣшиваются въ различныхъ разстояніяхъ отъ точки опоры коромысла, пропорціональныхъ коэффиціентамъ p_1, p_2, ..., p_n при соотвѣтствующихъ степеняхъ x, справа или слѣва, смотря по знаку коэффиціента. Когда всѣ члены первой части уравненія изображены такимъ образомъ на вѣсахъ, вѣсы уравновѣшиваютъ необходимымъ для этого грузомъ, который кладется на одну изъ чашекъ, и затѣмъ помѣщаютъ на разстояніи отъ точки опоры, принятомъ за единицу, грузъ, рав-

ный A, съ одной или съ другой стороны отъ точки опоры, смотря по знаку A. Равновѣсіе нарушается. Тогда подводятъ подъ тѣла вращенія одинъ или нѣсколько сообщающихся сосудовъ съ водой, уровень которой можетъ быть произвольно измѣняемъ (см. рис.). При повышеніи уровня воды въ сосудахъ каждое изъ тѣлъ вращенія толкаетъ коромысло вверхъ съ силой, пропорціональной объему погруженной части и приложенной къ точкѣ коромысла, опредѣляемой коэффиціентомъ при соотвѣтствующей степени x. Когда равновѣсіе установится, измѣряютъ высоту x погруженныхъ отрѣзковъ тѣлъ. Эта высота будетъ, очевидно, однимъ изъ корней уравненія. Высоту измѣряютъ при помощи линейки, погруженной въ жидкость: нулевое дѣленіе ли-



нейки лежитъ въ одной горизонтальной плоскости съ нижними концами тѣлъ вращенія, когда вѣсы находятся въ равновѣсіи. Можно также нанести дѣленія на цилиндрическое тѣло вращенія (тѣло 1-й степени); можно, наконецъ, пустить въ жидкость ареометръ и пользоваться имъ какъ ноніусомъ при линейкѣ, дѣлая отсчеты при помощи катетометра. Въ этомъ случаѣ устраняется вліяніе капиллярности.

Когда равновѣсіе достигнуто и одинъ изъ корней уравненія найденъ, продолжаютъ приливать воду. Равновѣсіе нарушается и затѣмъ снова возстановляется: отмѣчаютъ второй корень уравненія и т. д. Простые корни отличаются отъ двойныхъ тѣмъ, что при послѣднихъ коромысло наклоняется въ одну и ту же сторону, не доходя до корня и перейдя черезъ него. Понятно, кромѣ того,

что всегда можно возстановить равновѣсіе положенными на чашку разновѣсками, которыя дадутъ значеніе функціи

$$p_1x^n + p_2x^{n-1} + \ldots + p_nx$$

при томъ значеніи x, которое указывается высотой жидкости; иначе говоря, приборъ служитъ не только для рѣшенія уравненій, но и для изученія функцій приведеннаго выше вида.

Такимъ образомъ можно было бы найти всѣ положительные корни уравненія, если бы тѣла различныхъ степеней имѣли неограниченную высоту. Такъ какъ это условіе невыполнимо на практикѣ, то приходится либо преобразовывать соотвѣтствующимъ образомъ уравненіе, либо замѣнять воду болѣе тяжелой жидкостью, напр., ртутью.

Понятно также, что вмѣсто приливанія жидкости можно помѣстить сосуды съ нею на поднимающемся столикѣ или, наконецъ, устроить вѣсы такъ, чтобы коромысло ихъ можно было опускать. Легко также устроить приспособленіе для привѣшиванія двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ въ одной и той же точкѣ коромысла на случай равенства коэффиціентовъ при нѣсколькихъ членахъ уравненія, имѣющихъ одинаковые знаки. Наконецъ, если бы пришлось привѣсить къ коромыслу столько тѣлъ различныхъ степеней, что чувствительность вѣсовъ значительно уменьшилась бы, вслѣдствіе пониженія центра тяжести, то этому можно помочь, помѣщая подъ коромысломъ дополнительныя массы, какъ показываетъ нашъ рисунокъ.

Для нахожденія отрицательныхъ корней приходится, конечно, преобразовать уравненіе.

Приборъ, которымъ пользуется проф. Meslin, устроенъ изъ небольшихъ чувствительныхъ вѣсовъ, плечи которыхъ имѣютъ въ длину по 12 cm. Тѣла вращенія имѣютъ по 10 cm. въ высоту и даютъ непосредственно корни, заключающіеся между 1 и 10. На рисункѣ изображено положеніе тѣлъ вращенія для уравненія

$$\rho x^3 - 4x^2 - 7x = A.$$

При $A = 480$ это уравненіе имѣетъ корень, содержащійся между 4, 9 и ρ. Для нахожденія этого корня надо положить 480 гр. на разстояніи 1 cm. отъ точки опоры коромысла, или 40 гр. на чашку вѣсовъ, находящихся на разстояніи 12 cm.

Что касается тѣлъ вращенія, то ихъ конструкція не представляетъ затрудненій. Ихъ вѣсъ и матеріалъ не играютъ большой роли, а ихъ форма легко вывѣряется при помощи тѣхъ же вѣсовъ. Особенно удобнымъ матеріаломъ для нихъ оказывается аллюминій.

Упрощенный способъ опредѣленія непрерывной смѣшанной періодической дроби.

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда періодъ непрерывной періодической дроби начинается не съ 1-го частнаго, можно, такъ сказать, придвинуть періодъ къ началу на одно частное, и тѣмъ упростить ея вычисленіе слѣдующимъ образомъ. Послѣднее изъ частныхъ, предшествующихъ періоду (и не входящихъ въ него), мы разбиваемъ на два алгебраическихъ слагаемыхъ такъ, чтобы одно изъ нихъ равнялось послѣднему частному, входящему въ періодъ, и такимъ образомъ періодъ начнется однимъ частнымъ раньше. ПоясНимъ сказанное примѣромъ.

Найдемъ значеніе непрерывной періодической дроби [3,(2,4)] *).

Слѣдуя обыкновенному способу, мы поступили бы такъ:

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=3+\frac{1}{y}=\frac{3y+1}{y};\quad y=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y}}=\frac{9y+2}{4y+1};$$

$$4y^2-8y-2=0,\ \text{или}\ 2y^2-4y-1=0,$$

откуда

$$y=\frac{2+\sqrt{6}}{2};$$

$$x=\frac{3\,\frac{2+\sqrt{6}}{2}+1}{\frac{2+\sqrt{6}}{2}}=\frac{(8+3\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)}{(2+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)}=\sqrt{6}+1.$$

Пользуясь же указаннымъ упрощеніемъ, мы найдемъ, что

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\ddots}}}-1=z-1;$$

$$z=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{z}}=\frac{9z+4}{2z+1};\quad 2z^2-8z-4=0,\ \text{или}\ z^2-4z-2=0,$$

*) Мы будемъ для краткости обозначать, напр., чистую періодическую дробь, въ періодъ которой входятъ частныя $a_1, a_2,\dots, a_n$, черезъ $[(a_1, a_2,\dots, a_n)]$, и смѣшанную періодическую дробь, періоду которой предшествуютъ частныя $b_1, b_2,\dots, b_m$, и въ періодъ которой входятъ частныя $a_1, a_2,\dots, a_n$ — черезъ $[b_1, b_2,\dots, b_m, (a_1, a_2,\dots, a_n)]$.

откуда

$$z = 2 + \sqrt{6},$$

и, слѣдовательно,

$$x = 2 + \sqrt{6} - 1 = \sqrt{6} + 1.$$

Очевидно, что значеніе x вторымъ способомъ мы нашли скорѣе.

Если бы періоду предшествовало не одно, а нѣсколько частныхъ, то и въ этомъ случаѣ выгоднѣе пользоваться указаннымъ способомъ. Если, напр., надо опредѣлить значеніе дроби [2, 1, 4, (2, 3)], то, написавъ ее такимъ образомъ:

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y + 1}} = \frac{3y + 5}{y + 2},$$

опредѣлимъ сначала $y = [(3, 2)]$ $\left(y = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}\right)$, послѣ чего найдемъ и x $\left(x = \frac{44 + \sqrt{15}}{17}\right)$. Легко убѣдиться, что въ этомъ случаѣ значеніе x указаннымъ способомъ находится скорѣе.

Н. Кузьминскій.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

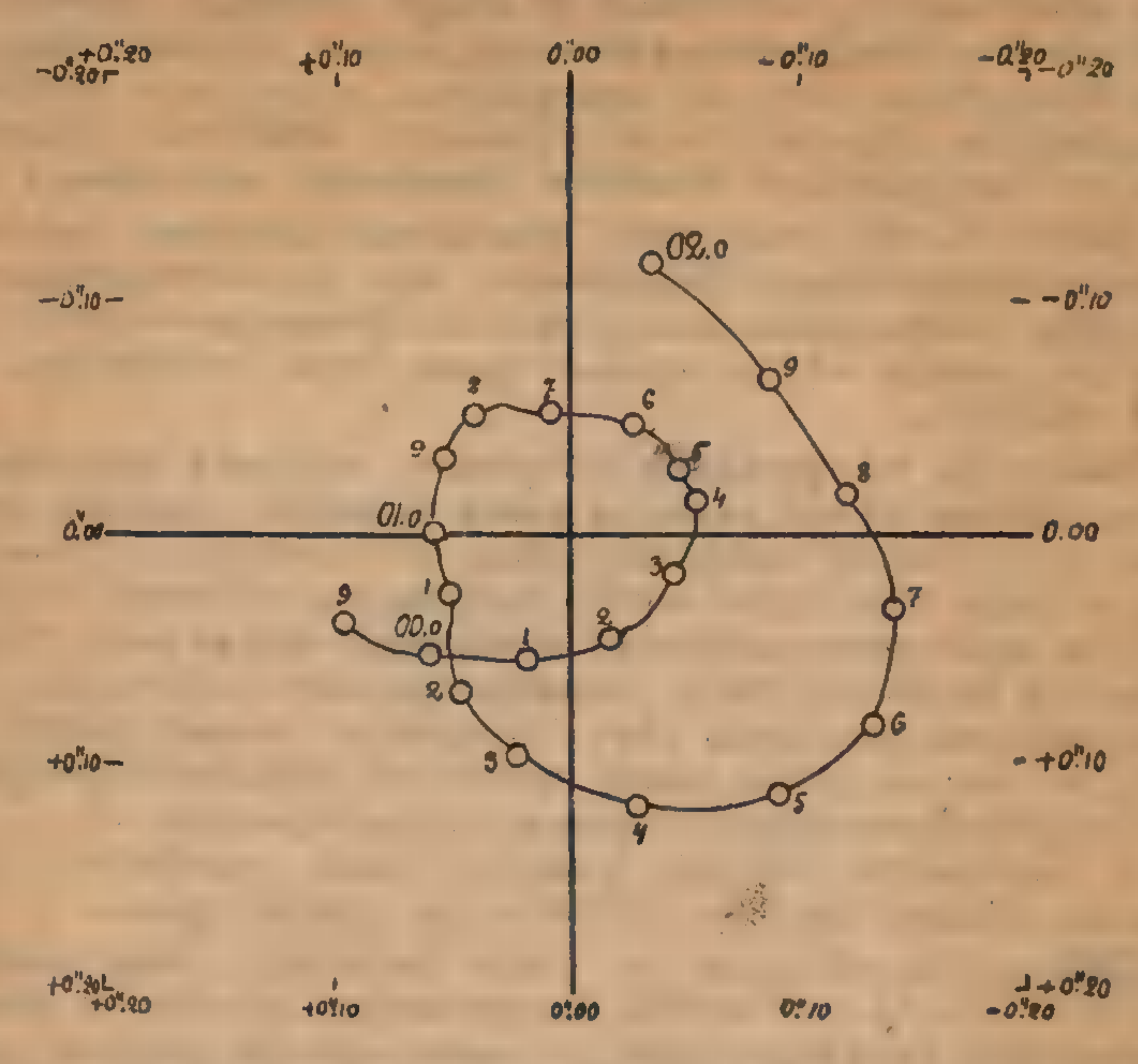
Измѣненіе оси вращенія земли. Въ № 308 „Вѣстника" (отъ 15 ноября 1901 года) была помѣщена статья на эту-же тему г. Д. Шора; въ этой статьѣ, между прочимъ, упомянуто объ организаціи международной сѣти наблюдательныхъ постовъ для возможно полнаго изученія этого явленія—движенія полюса вращенія по поверхности земли.

Въ настоящее время вышелъ I-й томъ результатовъ этого международнаго предпріятія, изданный проф. Th. Albrecht'омъ *). Станціи для наблюденій, въ числѣ шести—всѣ расположены почти подъ одною широтою и въ возможно разныхъ долготахъ, какъ видно изъ слѣдующаго:

Ст.	Mizusawa (Японія)	$\varphi = 39^0 8' 3''.62$	$\lambda = -141^0 7' 30''$
„	Чарджуй (Центр. Азія)	$= 39\ 8\ 10.67$	$-63\ 29\ 20$
„	Carloforte (Италія)	$= 39\ 8\ 8.93$	$-8\ 18\ 50$
„	Gaithersburg (Вост. Америка)	$= 39\ 8\ 13.20$	$+77\ 11\ 56$
„	Cincinati (Средн. Америка)	$= 39\ 8\ 19.31$	$+84\ 25\ 20$
„	Ukiah (Зап. Америка)	$= 30\ 8\ 12.07$	$+123\ 13.$

*) „Centralbureau der Jnternationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen, № 8: Resultate des Jnternationalen Breitendienstes. Bd. I. Von Th. Albrecht.—4° Berlin 1903".

Всѣ эти станціи начали функціонировать съ конца 1899 г., и результаты наблюденій поступили въ Центральное Бюро между-



народнаго измѣренія Земли въ Потсдамѣ. На основаніи этихъ наблюденій, оказалось возможнымъ вычислить и, на основаніи вычисленій, вычертить путь полюса за время съ 1899.9 по 1902.0, каковой путь и изображенъ на прилагаемомъ чертежѣ, являющемся продолженіемъ чертежа, помѣщеннаго въ вышеупомянутой статьѣ г. Шора (см. № 308 „Вѣстника", стр. 197). *В. А. Е.*

Дѣйствія радія на животный организмъ. Въ № 23 журнала „Berliner Klinische Wochenschrift" за текущій годъ Е. С. Лондонъ сообщаетъ о своихъ изслѣдованіяхъ *физіологическаго дѣйствія беккерелевыхъ лучей*. Опыты эти были произведены имъ въ отдѣленіи общей паталогіи *Императорскаго Института Экспериментальной Медицины* въ С.-Петербургѣ.

Е. С. Лондонъ оперировалъ посредствомъ препарата бромистаго радія въ количествѣ 30 mgr., заключеннаго въ коробку изъ гутаперчи и металла, съ крышкой изъ слюды.

Во-первыхъ, было изслѣдовано дѣйствіе радія на мышей. Уже прежде было извѣстно, что радій, введенный въ стеклянныхъ трубкахъ подъ кожу маленькихъ млекопитающихся животныхъ, въ области головного и спинного мозга, убиваетъ ихъ по истеченіи нѣкотораго промежутка времени *). Е. С. Лондонъ изслѣдо-

*) Danisz, Comptes rendus, 1903, № 7, p. 461.

валъ болѣе интересную проблему—дѣйствіе радія на разстояніи. Мыши, подвергшіяся продолжительному (отъ 1—3 дней) воздѣйствію лучей радія, заболѣвали и вскорѣ умирали. Мозгъ ихъ, равно какъ и кожа, оказывались при этомъ сильно поврежденными. Напротивъ того, всѣ контрольные экземпляры мышей, находившіеся въ тѣхъ же точно условіяхъ, исключая воздѣйствія радія, не обнаруживали никакихъ признаковъ заболѣванія.

Далѣе Е. С. Лондонъ изслѣдовалъ дѣйствіе лучей радія на человѣческую кожу. Оказывается, что послѣ нѣкотораго времени кожа, освѣщенная беккерелевыми лучами, воспаляется, какъ будто отъ ожога.—Артеріальная кровь подъ дѣйствіемъ этихъ лучей темнѣетъ.

Наконецъ, въ-третьихъ, особеннаго интереса заслуживаютъ опыты дѣйствія лучей радія на глаза слѣпыхъ. Слѣпые, которые только въ состояніи различать свѣтъ отъ темноты, и даже такіе, которые лишь при свѣтѣ молніи получаютъ свѣтовое ощущеніе, *видятъ на экранѣ тѣни предметовъ, освѣщенныхъ лучами радія.* Конечно, сперва они не въ состояніи узнавать предметовъ, которые раньше были извѣстны имъ лишь какъ комплексы осязательныхъ ощущеній; но весьма скоро новое (свѣтовое) ощущеніе ассоціируется съ соотвѣтствующимъ старымъ (осязательнымъ). Е. С. Лондонъ сообщаетъ, что ему удалось даже выработать методъ обученія слѣпыхъ письму и чтенію при помощи радія.

Дѣйствіе лучей радія на глазъ зависитъ, какъ полагаетъ Е. С. Лондонъ, отъ особой флуоресценціи ретины и различно у различныхъ индивидуумовъ; въ значительной степени оно зависитъ отъ здоровья глаза: вполнѣ прозрачный хрусталикъ въ сильной степени компенсируетъ это дѣйствіе. Замѣчательно, что радій вызываетъ въ глазу свѣтовое ощущеніе, даже если помѣстить его не противъ глаза, а со стороны виска или лба. Даже, помѣщенный со стороны затылка, радій вызываетъ у нѣкоторыхъ лицъ ощущеніе, достаточное для того, чтобы опредѣлить его мѣстонахожденіе. Послѣднее явленіе, по предположенію Е. С. Лондона, объясняется непосредственнымъ воздѣйствіемъ лучей на мозговой центръ.

П. Э.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

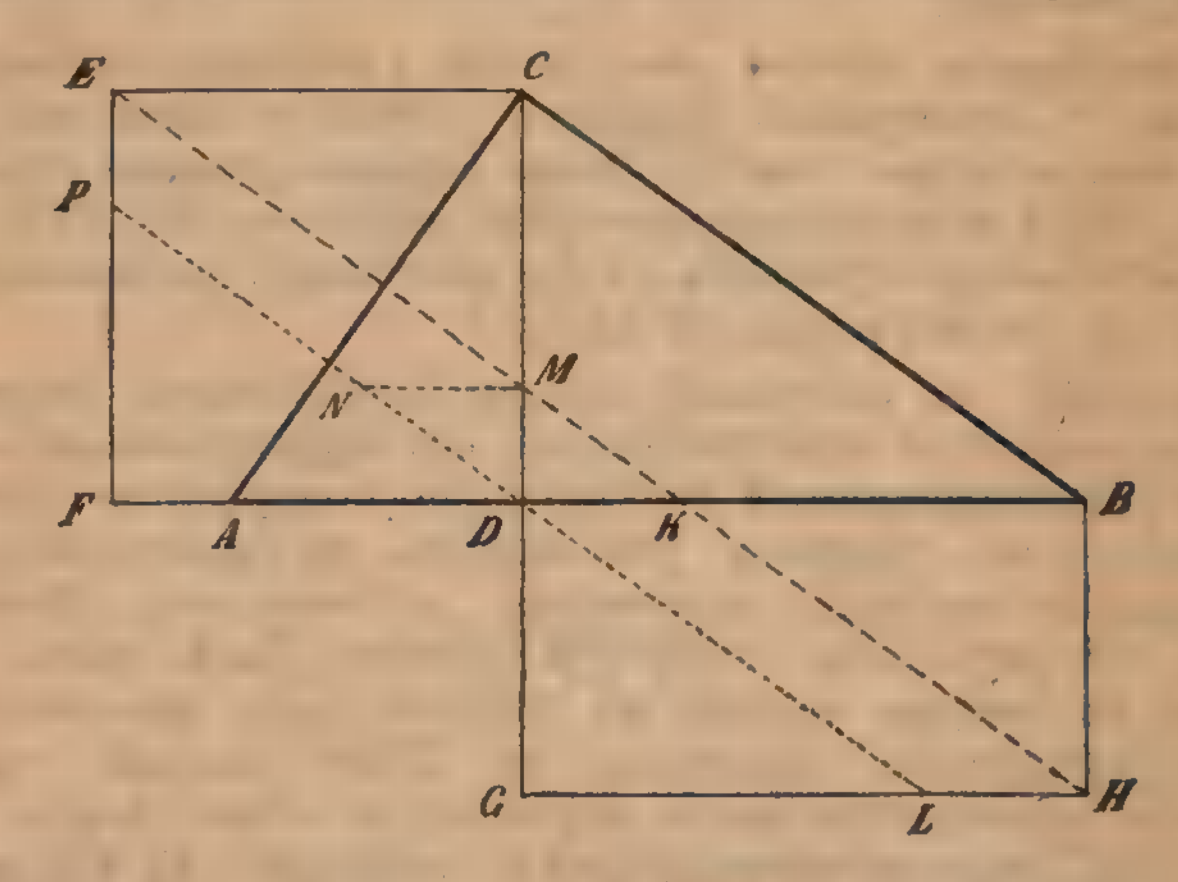
Геометрическое доказательство одного изъ основныхъ соотношеній между элементами прямоугольнаго треугольника.

На страницахъ „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" были помѣщены геометрическія доказательства Пиѳагоровой теоремы и ея обобщеній; для полноты недостаетъ еще геометрическаго доказательства теоремы: перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы, или

иначе: квадратъ, построенный на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равновеликъ прямоугольнику, стороны котораго суть отрѣзки гипотенузы.

Предлагаю два геометрическихъ доказательства вышеупомянутой теоремы.

Доказательство 1-ое. Чрезъ вершину E квадрата FECD проведемъ прямую, параллельную катету CB, и продолжимъ ее до встрѣчи съ перпендикуляромъ, возставленнымъ къ гипотенузѣ AB изъ точки ея B; чрезъ H проведемъ прямую, параллельную AB, до встрѣчи съ продолженіемъ перпендикуляра CD; получимъ прямоугольникъ DBHG, равновеликій квадрату FECD, что видно изъ слѣдующаго: квадратъ FECD равновеликъ параллелограмму KECB (какъ имѣющіе общее основаніе и высоту), параллело-



граммъ KECB равновеликъ параллелограмму MCBH (по той же причинѣ), наконецъ, параллелограммъ MCBH равновеликъ прямоугольнику GDBH (сторона BH общая, а противоположныя стороны лежатъ на прямой, параллельной BH). Остается доказать, что сторона BH равна отрѣзку AD гипотенузы AB. Для этого разсмотримъ прямоугольные треугольники ADC и MCE; они равны, вслѣдствіе равенства катетовъ CD и CE и острыхъ угловъ ACD и MEC (стороны взаимно-перпендикулярны), слѣдовательно, AD = CM, послѣдняя же равна BH (какъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между параллельными прямыми).

Доказательство 2-ое. Чрезъ вершину D квадрата FECD проведемъ прямую, параллельную CB, и чрезъ M — прямую ‖FD до встрѣчи съ PD; проведенныя прямыя раздѣлятъ квадратъ FECD на три части: прямоугольный треугольникъ DMN, прямоугольный треугольникъ DFP и пятиугольникъ MNPEC. Треугольникъ DMN приложимъ къ фигурѣ MNPEC такъ, чтобы DM совмѣстилась съ PE; тогда получимъ четыреугольникъ, равный трапеціи LDBH. Если къ полученной фигурѣ приложимъ прямоугольный треуголь-

никъ DFP, равный треугольнику DGL, такъ, чтобы гипотенуза его совмѣстилась съ наклонной стороной трапеціи, то получимъ прямоугольникъ, равный прямоугольнику DBHG (доказательство настолько просто, что не считаю нужнымъ его помѣщать).

Л. Шульцъ.

РЕЦЕНЗІИ.

Прямолинейная тригонометрія. Составилъ **Н. П. Кильдюшевскій**, преподаватель математики Казанской 3-ей гимназіи. Казань. 1903 г. Ц. 75 коп.

По заявленію автора, „настоящій учебникъ составленъ примѣнительно къ программѣ среднихъ учебныхъ заведеній, согласно которой *тригонометрія имѣетъ цѣлью научить рѣшать треугольники.* Поэтому, теорія тригонометрическихъ величинъ въ предлагаемомъ курсѣ тригонометріи развита лишь настолько, насколько это необходимо для вышеуказанной цѣли".

Такъ какъ въ послѣднее время большинство нашихъ учебниковъ составляется примѣнительно къ оффиціальнымъ программамъ, то разсматриваемый учебникъ по содержанію существенно не отличается отъ другихъ учебниковъ по тригонометріи, хотя по изложенію имѣетъ нѣкоторыя особенности. Вначалѣ, во введеніи, говорится объ измѣреніи угловъ. Далѣе весь матеріалъ раздѣленъ на четыре отдѣла: въ отдѣлѣ I-мъ излагается теорія тригонометрическихъ величинъ; во II-мъ отдѣлѣ указывается *возможность* вычисленія этихъ величинъ и объясняется составъ и употребленіе тригонометрическихъ таблицъ; въ III-мъ отдѣлѣ выводятся соотношенія между сторонами и углами прямоугольныхъ и косоугольныхъ тр-въ и, наконецъ, въ отдѣлѣ IV-мъ разбираются способы рѣшенія тр-въ и даются примѣры на примѣненіе тригонометріи къ рѣшенію различныхъ геометрическихъ задачъ. Для упражненій въ учебникѣ помѣщено около 300 задачъ; на нѣкоторыя изъ нихъ въ концѣ книги даны отвѣты.

Г. Кильдюшевскій объявляетъ, что „*Ученый Комитетъ Мин. Нар. Пр., разсмотрѣвъ рукопись тригонометріи, призналъ возможнымъ допустить ее въ качествѣ учебнаго руководства для среднихъ учебныхъ заведеній*", и что „*при печатаніи рукопись исправлена, согласно указаніямъ Ученаго Комитета*". Несмотря на это, въ учебникѣ есть промахи, требующіе дальнѣйшаго исправленія.

Обобщая понятіе объ углѣ (§ 2), г. Кильдюшевскій говоритъ, что уголъ въ $360^0.n+\alpha$, при n цѣломъ и положительномъ, геометрически равенъ углу α (стр. 11). Хотя ранѣе нигдѣ не говорится, что слѣдуетъ понимать подъ углами *геометрически равными*, однако, нетрудно догадаться, что подразумѣваются *неравные* углы, стороны которыхъ совпадаютъ. Введеніе такого *новаго* понятія въ

учебникъ, мнѣ кажется, не только безполезно, но даже вредно, такъ какъ онъ не согласуется съ общимъ понятіемъ о равенствѣ геометрическихъ фигуръ.

Встрѣчаются также не совсѣмъ удачные термины; такъ, линейное или дуговое измѣреніе угловъ авторъ называетъ *круговымъ измѣреніемъ* (стр. 2); кругъ внѣвписанный въ тр-къ названъ *приписаннымъ* кругомъ (стр. 83). Введеніе этихъ терминовъ вмѣсто общепринятыхъ не вызывается никакою необходимостью.

Выражая стороны тр-ка чрезъ его периметръ и углы, авторъ пользуется равенствомъ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, хотя равенство это ранѣе не было выведено, а было лишь указано въ числѣ упражненій (стр. 77). Это неудобно.

Можно еще упрекнуть автора въ томъ, что нѣкоторыя статьи изложены имъ слишкомъ кратко. Напр., при разсмотрѣніи измѣненій тригонометрическихъ величинъ слѣдовало-бы обратить бо́льшее вниманіе на ихъ періодичность; при этомъ полезно было-бы подробнѣе сказать о тригонометрическихъ линіяхъ, такъ какъ при помощи нихъ нагляднѣе представляется измѣненіе тригонометрическихъ величинъ и достигается лучшее усвоеніе этой основной статьи тригонометріи.

Формулы для $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$ выведены въ предположеніи, что $\alpha < 90^0$, $\beta < 90^0$ и $\alpha + \beta < 90^0$; о случаѣ, когда при $\alpha < 90^0$ и $\beta < 90^0$, сумма $\alpha + \beta > 90^0$, совсѣмъ не упоминается. Обобщеніе этихъ формулъ на углы произвольной величины показано, въ видѣ примѣровъ, только для двухъ случаевъ. Для начинающихъ изучать тригонометрію этого недостаточно.

При объясненіи возможности вычисленій тригонометрическихъ величинъ совсѣмъ не упоминается о формулахъ Симсона; о случаяхъ, когда такія вычисленія выполняются при помощи правильныхъ многоугольниковъ, также ничего не говорится.

Чтобы учебникъ вполнѣ могъ служить руководствомъ для среднихъ учебныхъ заведеній, эти пробѣлы необходимо пополнить.

Въ заключеніе замѣчу, что помѣстивъ статью о тригонометрическихъ ур-яхъ (тоже очень краткую) въ концѣ курса, въ видѣ дополненія, г. Кильдюшевскій, повидимому, придаетъ ей второстепенное значеніе; это предположеніе подтверждается тѣмъ, что въ учебникѣ совсѣмъ нѣтъ упражненій на эту статью. Такой взглядъ невѣренъ: статья о тригонометрисескихъ ур-яхъ, какъ по своему значенію въ наукѣ, такъ и по педагогическимъ соображеніямъ, должна быть отнесена къ теоретической части тригонометріи, такъ какъ упражненія въ рѣшеніи тригонометрическихъ ур-ній имѣютъ первостепенное значеніе въ усвоеніи теоріи тригонометрическихъ величинъ.

Дм. Ефремовъ.

(Иваново-Вознесенскъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 352 (4 сер.). Внутри треугольника взята точка D такъ, что произведеніе трехъ опущенныхъ изъ нея на стороны треугольника перпендикуляровъ Da, Db и Dc достигаетъ maximum'а для даннаго треугольника. Зная эти перпендикуляры, построить треугольникъ.

И. Коровинъ (Екатеринбургъ).

№ 353 (4 сер.). Въ треугольникѣ ABC проведены биссектрисы BI и Cj внутреннихъ угловъ B и C этого треугольника. Изъ произвольной точки M прямой Ij, соединяющей концы биссектрисъ, опущены перпендикуляры MN, MP и MQ соотвѣтственно на стороны AB, AC и BC. Показать, что

$$MN + MP = MQ.$$

В. Тюнинъ (Уфа).

№ 354 (4 сер.). Представить выраженіе

$$mx^2+ny^2+pz^2+(m-n-p)yz+(n-p-m)zx+(p-m-n)xy$$

въ видѣ произведенія двухъ многочленовъ, цѣлыхъ относительно x, y и z. Примѣнить полученную формулу къ случаю, когда $m=n=p=1$.

Н. С. (Одесса).

№ 355 (4 сер.). Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$\frac{4x(x+y)}{y^2(4x^2-8x+3)}=1.$$

Л. Гальперинъ (Бердичевъ).

№ 356 (4 сер.) Найти наибольшее значеніе, котораго можетъ достигнуть острый уголъ между медіанами, проведенными къ двумъ катетамъ прямоугольнаго треугольника.

Евг. Буницкій (Одесса).

№ 357 (4 сер.). При 0° въ резервуаръ емкостью въ 25 литровъ введено 39 граммовъ воздуха. Опредѣлить: 1) давленіе этого воздуха и 2) температуру, при которой это давленіе будетъ равно 2 атмосферамъ. Удѣльный вѣсъ d воздуха при нормальныхъ условіяхъ равенъ 0,0013, коэффиціентъ расширенія воздуха α равенъ 0,004.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 216 (4 сер.). *Даны прямая* AB *и точки* C *и* D, *лежащія внѣ прямой. Найти на прямой* AB *точку* x *такъ, чтобы уголъ* CxD *былъ* maximum.

Если точки C и D лежатъ по разныя стороны прямой AB, то разсматриваемый уголъ получитъ наибольшее значеніе тогда, когда x есть точка встрѣчи прямыхъ CD и AB, такъ какъ въ этомъ случаѣ онъ становится равнымъ двумъ прямымъ, а для всякой другой точки y прямой AB уголъ CyD (подъ угломъ CyD подразумѣвается, какъ всегда, внутренній уголъ треугольника CyD) меньше двухъ прямыхъ. Пусть теперь точки C и D лежатъ по одну сторону отъ прямой AB и пусть прямая AB встрѣчаетъ CD въ точкѣ M. Проведемъ черезъ точки C и D окружность, касающуюся прямой AB; для этого отложимъ на прямой AB по обѣ стороны отъ точки M отрѣзки Mx' и Mx'', каждый изъ которыхъ равенъ средней пропорціональной между отрѣзками MD и MC, а затѣмъ опишемъ около треугольниковъ CDx' и CDx'' соотвѣтственно окружности O и O', которыя и суть искомыя. Разсмотримъ

точку y, лежащую гдѣ-нибудь на лучѣ Mx' (но не на его продолженіи въ противоположную сторону) и отличную отъ точки x'. Точка y лежитъ по ту же сторону отъ прямой CD, какъ и сегментъ $Cx'D$ окружности O, и притомъ внѣ этого сегмента, такъ какъ y—точка (отличная отъ точки прикосновенія) касательной Mx' къ дугѣ этого сегмента; поэтому, какъ это извѣстно изъ свойствъ окружности, справедливо неравенство: $\angle CyD < \angle Cx'D$ (1). Точно также для всякой точки z луча Mx'', отличной отъ точки x'', имѣемъ: $\angle CzD < \angle Cx''D$ (2). Если прямая CD перпендикулярна къ прямой AB, то, перегибая чертежъ по прямой CD, убѣдимся въ равенствѣ угловъ $Cx'D$ и $Cx''D$, а потому обѣ точки x' и x'' (см. (1), (2)) суть искомыя, т. е. углы $Cx'D$ и $Cx''D$ и только эти углы представляютъ собою наибольшія значенія перемѣннаго угла CxD. Пусть теперь прямая CD не перпендикулярна къ прямой AB, и пусть изъ смежныхъ угловъ CMx' и CMx'' уголъ CMx'—острый. У треугольниковъ CMx'' и CMx' сторона CM общая, и стороны Mx' и Mx'' равны, но уголъ CMx'', какъ тупой, больше остраго угла CMx'; поэтому $x''C > x'C$ (3), и точно также $x''D > x'D$ (4). Такъ какъ точки x' и x'', будучи симметричны относительно точки M, одинаково удалены отъ прямой CD, то высоты треугольниковъ CDx' и CDx'', проведенныя къ общему основанію CD, равны, а потому площади треугольниковъ CDx' и CDx'' равны, такъ что

$$\frac{x''C.x''D}{2}\cdot\sin\angle Cx''D=\frac{x'C.x'D}{2}\cdot\sin\angle Cx'D \quad (5),$$

откуда (см. (3), (4), (5)) слѣдуетъ, что

$$\sin\angle Cx''D:\sin\angle Cx'D=\frac{x'C}{x''C}\cdot\frac{x'D}{x''D}<1 \quad (6).$$

Замѣчая, что уголъ $Cx''D$ острый, какъ часть остраго угла $Dx''M$, выводимъ изъ неравенства (6), что уголъ $Cx''D$ меньше угла $Cx'D$, если этотъ уголъ острый, и тѣмъ болѣе меньше его, если онъ тупой, такъ что $\angle Cx''D < \angle Cx'D$. Итакъ (см. (1), (2)),

$$<CzD<\angle Cx''D<\angle Cx'D>\angle CyD,$$

откуда вытекаетъ, что уголъ $Cx'D$ есть въ разсматриваемомъ случаѣ единственный *maximum* перемѣннаго угла CxD. Наконецъ, если прямыя CD и AB параллельны, то, опуская изъ средины K прямой CD перпендикуляръ Kx_1 на прямую AB, описывая около треугольника CDx_1 окружность и разсуждая по предыдущему, найдемъ, что уголъ Cx_1D есть въ данномъ случаѣ единственное наибольшее значеніе разсматриваемаго перемѣннаго угла.

И. Вовси (Двинскъ); *В. Дробовъ* (Усть-Медвѣдица); *Г. Огановъ* (Эривань).

№ 281 (4 сер.). ***Какого вида треугольникъ*** ABC, ***для котораго***

$$(a^3+b^3-c^3):(a+b-c)=c^2,\ \sin A\sin B=\frac{3}{4}\cdot$$

гдѣ a, b, c—***стороны***, A, B—***углы треугольника.***

Первое изъ предложенныхъ равенствъ даетъ:

$$a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3,\quad a^3+b^3=(a+b)c^2,$$

откуда, дѣля обѣ части послѣдняго равенства на $a+b$, что возможно, такъ какъ $a+b\neq0$, имѣемъ:

$$a^2-ab+b^2=c^2 \quad (1).$$

Пользуясь формулой $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, находимъ (см. (1)):

$$a^2-ab+b^2=a^2+b^2+2ab\cos C,$$

$$-2ab\cos C=-ab,\quad \cos C=\frac{1}{2},$$

откуда $C=60^0$ (2),

такъ какъ C — уголъ треугольника.

Представивъ второе изъ предложенныхъ равенствъ въ видѣ

$$\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]=\frac{3}{4}$$

и замѣчая (см. (2)), что $\cos(A+B)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$, имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{4},\quad \cos(A-B)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\cos(A-B)=1,$$

откуда $A-B=0$, такъ какъ A и B углы треугольника. Итакъ, $A+B=120^\circ$, $A=B=60^\circ$. Поэтому разсматриваемый треугольникъ равносторонній.

Г. Огановъ (Эривань); *Д. Правдинъ* (Петрозаводскъ); *Н. Куницынъ* (Усть-Медвѣдица).

№ 284 (4 сер.). *Вычислить острые углы прямоугольнаго треугольника, зная острый уголъ α между медіанами, проведенными къ его катетамъ.*

Пусть $BM=m_b$ и $CN=m_c$ суть медіаны, проведенныя изъ вершинъ острыхъ угловъ B и C, O—точка встрѣчи медіанъ, b и c—длины катетовъ, противолежащихъ соотвѣтственно угламъ B и C. Такъ какъ $\frac{BO}{OM}=2$ (1), то площадь BOC равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника BMC, т. е. $\frac{2}{3}$ половины площади ABC, или трети площади ABC. Изъ подобія треугольниковъ NOM и BOC убѣждаемся (см. (1)), что площадь S треугольника NOM въ 4 раза менѣе площади BOC, т. е. площадь S равна $\frac{1}{12}$ площади ABC. Поэтому

$$S=\frac{OM.ON.\sin\alpha}{2}=\frac{1}{3}m_b\cdot\frac{1}{3}m_c\cdot\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{bc}{2},\ 4m_bm_c=3bc\operatorname{cosec}\alpha,$$

$$16m_b^2m_c^2=16(\overline{AB}^2+\overline{AM}^2)(\overline{AC}^2+\overline{AN}^2)=16\left(c^2+\frac{b^2}{4}\right)\left(b^2+\frac{c^2}{4}\right)=9b^2c^2\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

$$4b^4-(9\operatorname{cosec}^2\alpha-17)b^2c^2+4c^4=0\quad(2).$$

Раздѣливъ уравненіе (2) на c^4 и замѣняя $\frac{b}{c}$ черезъ $\operatorname{tg}B$, получимъ:

$$4\operatorname{tg}^4B-(9\operatorname{cosec}^2\alpha-17)\operatorname{tg}^2B+4=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}B=\frac{\sqrt{9\operatorname{cosec}^2\alpha-17\pm\sqrt{(9\operatorname{cosec}^2\alpha-17)^2-64}}}{4}.$$

Взявъ въ этой формулѣ, въ случаѣ возможности задачи, верхній или нижній знакъ при внутреннемъ радикалѣ, получимъ тангенсъ одного или другого изъ острыхъ угловъ прямоугольнаго треугольника.

Н. С. (Одесса); *Л. Ямпольскій* (Braunschweig).

Конецъ XXIX семестра.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 14-го Іюля 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.